Physique Générale: Mécanique

03.01: Cinématique

Sections SC, GC & SIE

Version du 16.9.2024

Dr. J.-P. Hogge,
Swiss Plasma Center
École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base
Swiss Plasma Center

Aujourd’hui

- Point matériel
- Cinématique (beaucoup de définitions)
  - Référentiel, système de coordonnées, trajectoire, abcisse curviligne, équation horaire, vitesse instantanée, vitesse moyenne, accélération, accélérations tangentielle et normale.
- Mouvement 1D rectiligne uniforme (MRU)
- Mouvement 1D rectiligne uniformément accéléré (MRUA)
- Mouvement circulaire uniforme

Définition: **Point matériel**
Point géométrique auquel on attribue une masse

Il est courant de considérer un corps dont on étudie le mouvement comme un point matériel concentrant toute la masse du corps, **si tous les points de celui-ci ont la même vitesse (sont en translation)**

- Une voiture sur l'autoroute
- Une pomme qui tombe d'un arbre
- Un chariot qui glisse sur un plan incliné
- Le mouvement des planètes autour du soleil (si on néglige la rotation propre)

Nous considérerons des points matériels dans toute la première partie du cours.

Faculté des sciences de base
Swiss Plasma Center

Définition: Cinématique
Description du mouvement d'un corps dans l'espace-temps (position, vitesse, accélération), **sans se soucier des causes du mouvement**.

Nous sommes intéressés par le temps t, le vecteur position $\vec{r}(t)$ en fonction du temps, mais aussi par le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{a}(t)$

Pour caractériser la position d'un objet et son évolution, il faut des références d'espace et de temps.

Faculté des sciences de base
Swiss Plasma Center

Définition: **Référentiel**

Ensemble de N points ($N \geq 4$) non coplanaires, immobiles les uns par rapport aux autres, par rapport auquel on étudie le mouvement d'un système

Remarque:

- L'observateur (vous) est immobile dans le référentiel, de même que ses outils de mesure de longueur et de temps.

Exemples de référentiels:

- Référentiel du laboratoire
- Référentiel géocentrique: Centre de la terre + 3 étoiles lointaines
- Référentiel de Kepler (héliocentrique): Centre du soleil + 3 étoiles fixes
- Référentiel du centre de masse (défini plus loin)
- Etc…

Système de coordonnées et repères

Définition: Système de coordonnées

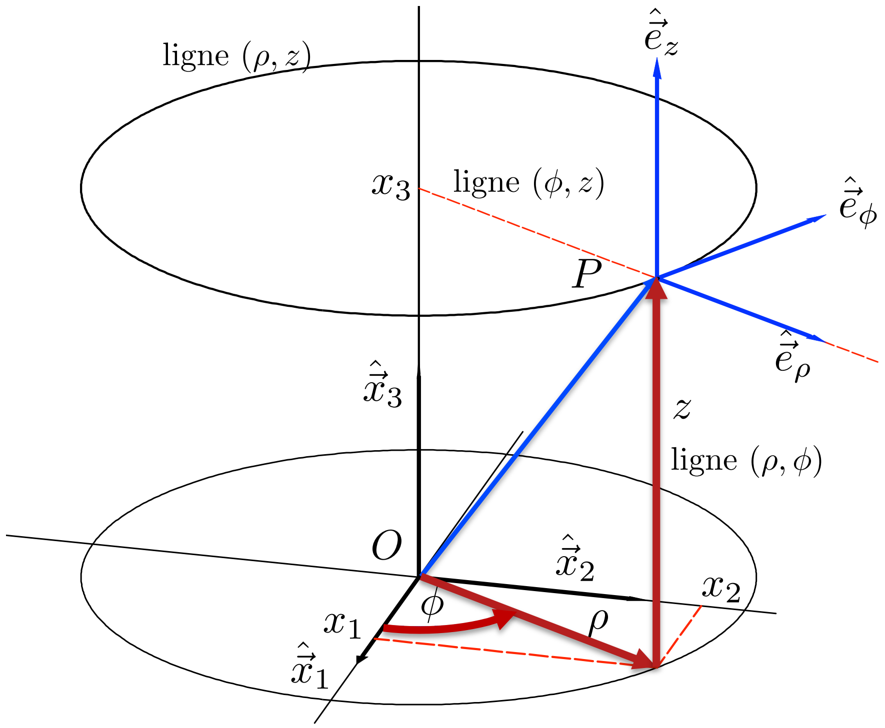
Toute paramétrisation des points du référentiel au moyen de trois nombres réels (q_1,q_2,q_3)

Exemples de systèmes de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes (x, y, z)
- Coordonnées polaires (en 2D) (r, θ)
- Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)
- Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)
- Etc…

- Il y a une infinité de systèmes de coordonnées pour chaque référentiel.

Coordonnées cylindriques (avant-goût)



Soit un repère cartésien $(O, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3)$
Et un point P paramétré par (x_1, x_2, x_3).

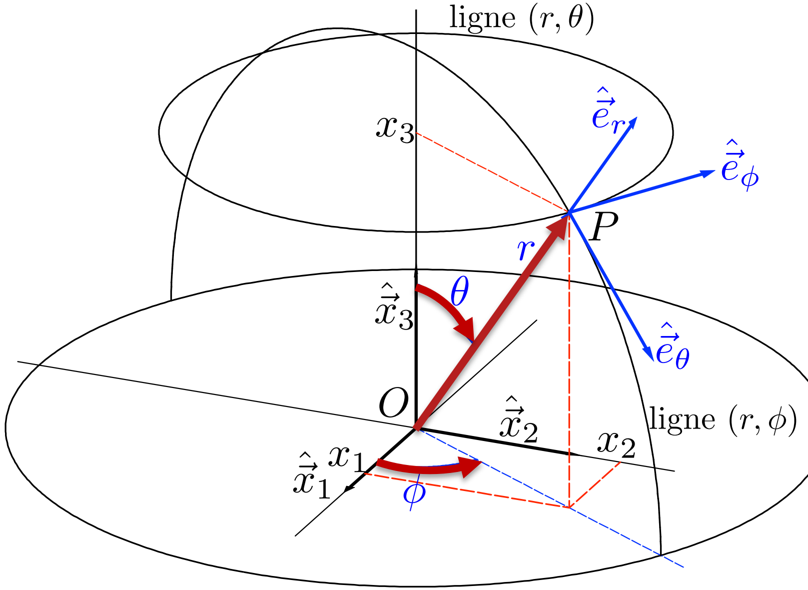
En coordonnées **cylindriques** le point P est paramétré par (ρ, ϕ, z)

<u>Définition:</u>
Ligne de coordonnées (j,k):
Lieu géométrique des points tels que la coordonnée i varie et les coordonnées j et k sont constantes

On construit le repère $(P, \hat{\vec{e}}_\rho, \hat{\vec{e}}_\phi, \hat{\vec{e}}_z)$ orthonormé tel que les vecteurs de base sont le long (ou tangents) aux lignes de coordonnées.

Coordonnées sphériques (avant-goût)

En coordonnées **sphériques** le point P est paramétré par (r,θ,ϕ)

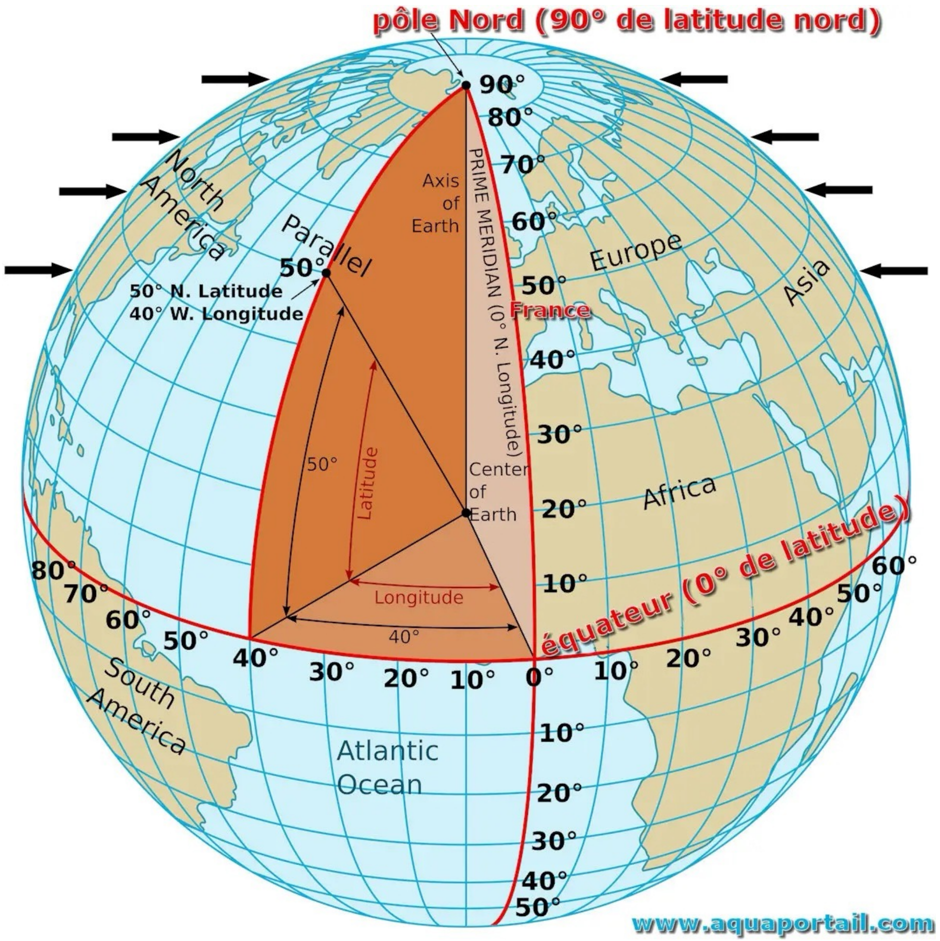


- On construit le repère $(P,\hat{\vec{e}}_r,\hat{\vec{e}}_\theta,\hat{\vec{e}}_\varphi)$ de la même manière
- L'orientation des repères $(P,\hat{\vec{e}}_\rho,\hat{\vec{e}}_\phi,\hat{\vec{e}}_z)$ et $(P,\hat{\vec{e}}_r,\hat{\vec{e}}_\theta,\hat{\vec{e}}_\varphi)$ depend de la position du point P, et varie donc en fonction du temps.
- Nous verrons plus tard (**chapitre 5**) comment exprimer la position, la vitesse et l'accélération en coordonnées cylindriques et sphériques.

Nous reviendrons en detail sur les coordonnées cylindriques et sphériques

Coordonnées terrestres

La latitude, la longitude, et l'altitude permettent de représenter la position d'un point dans les coordonnées terrestres.



Il ne faut pas confondre ‘Référentiel’ et ‘Système de coordonnées’/’Repère’.

- **Référentiel**: Objet physique par rapport auquel on désire décrire l’évolution d’un système.
  - Référentiel du laboratoire, du train, du système solaire etc…
- **Système de coordonnées et/ou repère**: Object mathématique qui permet de paramétrer la position, la vitesse et l’accélération dans un référentiel donné.
  - Coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques etc..

Trajectoire

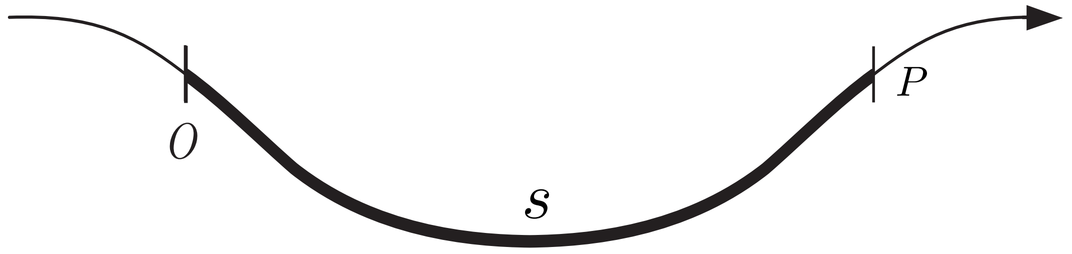
Définition: **Trajectoire**
Lieu géométrique des points du référentiel qui sont visités à un moment ou à un autre par un point matériel dont on étudie le mouvement.

La trajectoire est une figure géométrique, et ne contient aucune notion d'évolution

Exemples: Ligne droite, cercle, parabole, ellipse, hélice

<u>Définition:</u> **Abscisse curviligne** s

Longueur d'arc le long de la trajectoire entre un point de référence O et le point considéré P.



$s\,[\mathrm{m}]$

L'abscisse curviligne correspond à la distance parcourue par le point matériel entre les points O et P.
C'est une fonction du temps: $s = s(t)$

Il y a différentes manières d'exprimer une trajectoire:

- Dans un système de coordonnées (q_1,q_2,q_3), on exprime deux coordonnées en fonction de la troisième:

$$q_1 = q_1(q_3), \quad q_2 = q_2(q_3)$$

- On exprime les trois coordonnées en fonction d'un paramètre (p.ex un angle θ ou l'abscisse curviligne, ou encore le temps t)

$$q_1 = q_1(\theta), \quad q_2 = q_2(\theta), \quad q_3 = q_3(\theta)$$
$$q_1 = q_1(s), \quad q_2 = q_2(s), \quad q_3 = q_3(s)$$
$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t)$$

Pour construire la trajectoire, on fait varier le paramètre.

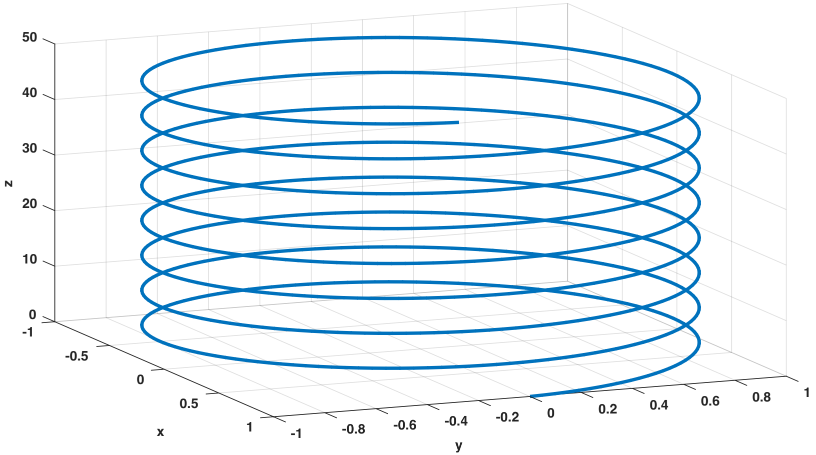
Exemples de trajectoires

Deux coordonnées exprimées en fonction de la troisième: Hélice

$$q_1 = q_1(q_3), \quad q_2 = q_2(q_3)$$

$$q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z$$

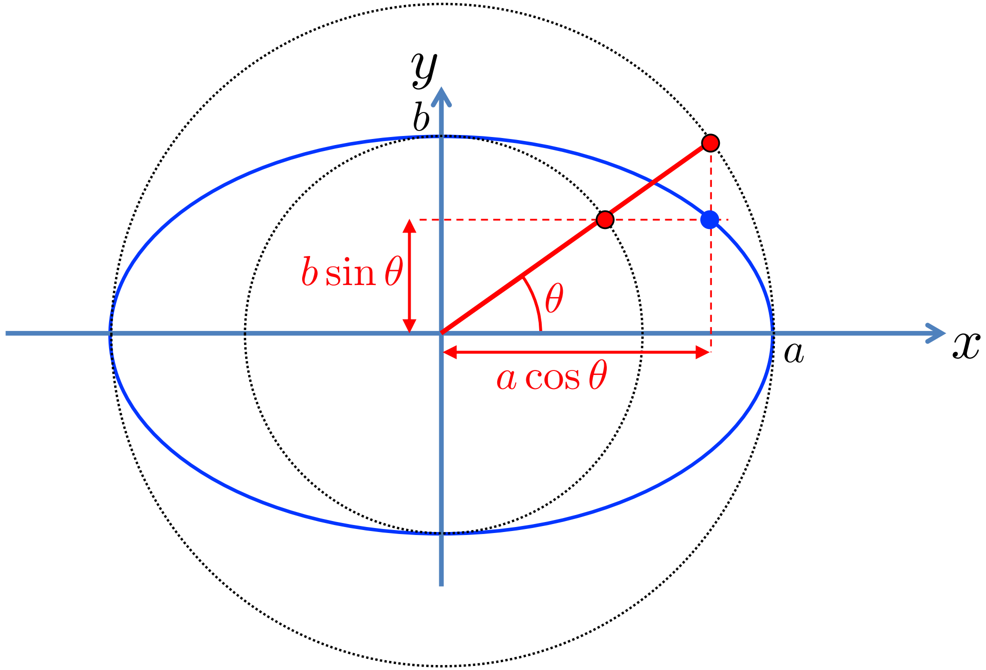
$$x(z) = \cos(z)$$
$$y(z) = \sin(z)$$



Trajectoire paramétrisée par un angle: Ellipse

$$(q_1, q_2) = (x, y)$$

$$x(\theta) = a\cos\theta$$
$$y(\theta) = b\sin\theta$$



Trajectoire paramétrisée par l'abscisse curviligne s

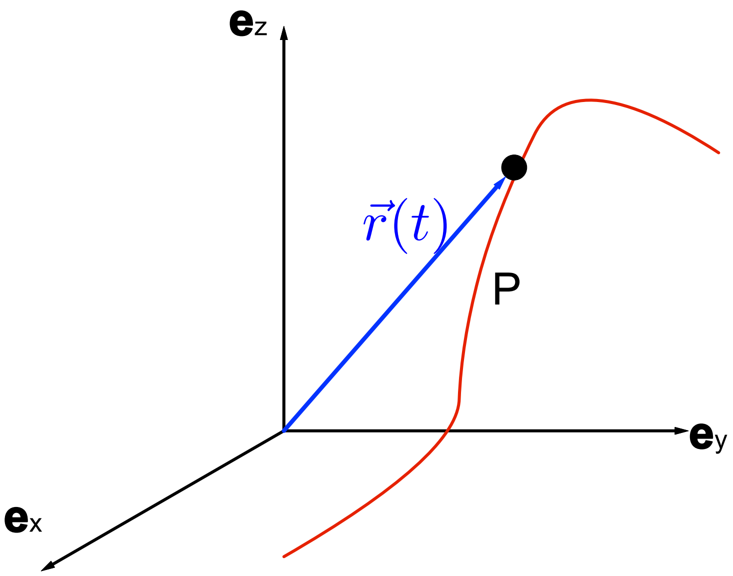
$$(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$$

$$s = \text{distance parcourue depuis le départ}$$

$$\begin{aligned} x = x(s) &= \text{"longitude"}(\text{distance parcourue}) \\ y = y(s) &= \text{"latitude"}(\text{distance parcourue}) \\ z = z(s) &= \text{altitude}(\text{distance parcourue}) \end{aligned}$$

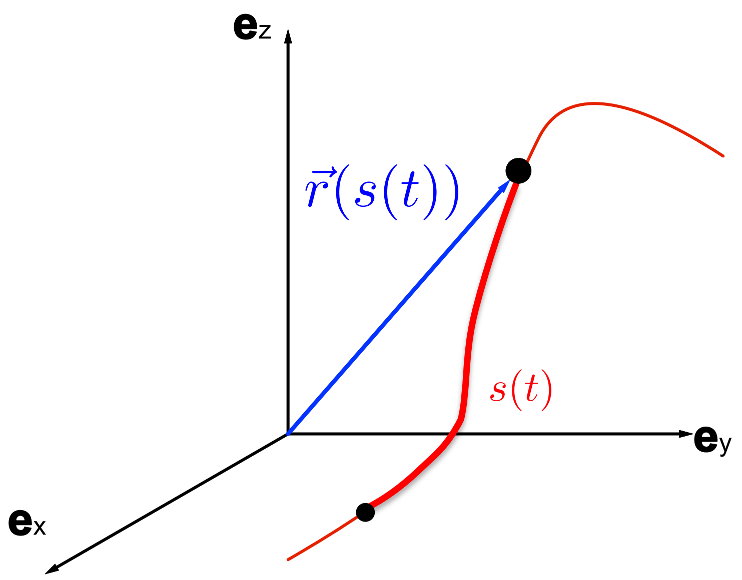
<u>Définition:</u> **Equation horaire**

Fonction $\vec{r}(t)$ qui décrit le vecteur position du point matériel **en fonction du temps.**



L'équation horaire contient le temps, et inclut donc la notion d'évolution, contrairement à la trajectoire seule.

Equation horaire et abscisse curviligne



Si on connaît l'abscisse curviligne $s(t)$ et la paramétrisation de la trajectoire par l'abscisse curviligne $\vec{r}(s)$, on en déduit l'équation horaire:

$$\left.\begin{array}{c}\vec{r}(s)\\ s(t)\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Vitesse et vitesse scalaire

Définition: Vitesse instantanée

Vecteur dérivée temporelle du vecteur position:

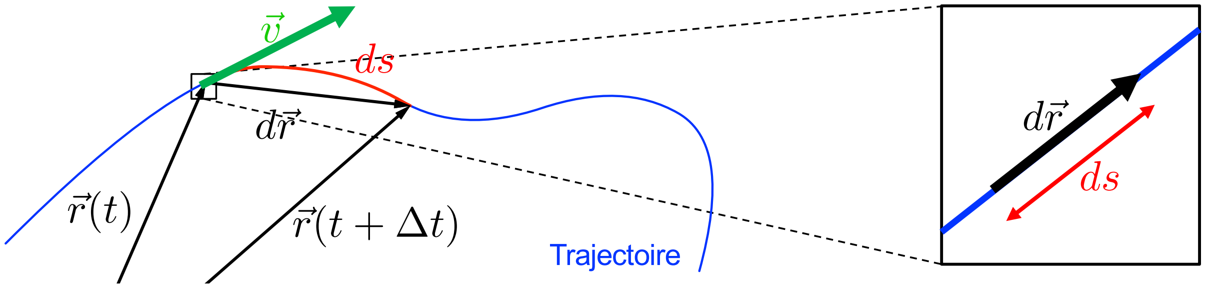
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \qquad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Définition: Vitesse scalaire

$$v(t) = \frac{d}{dt} s(t) \qquad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Propriété du vecteur vitesse

Propriété: La vitesse $\vec{v}(t)$ est tangente à la trajectoire.



- L'abscisse curviligne est une fonction du temps: $s = s(t)$
- La trajectoire est paramétrisée par s $\vec{r}(s) = \vec{r}(s(t))$
- La vitesse vectorielle s'écrit alors:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}$$

- Dans la limite $\Delta t \to 0$ le vecteur $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ est tangent à la trajectoire et de norme 1.

Propriété de la vitesse scalaire

<u>Propriété:</u> La vitesse scalaire est la norme de la vitesse

$$v(t) = ||\vec{v}(t)||$$

- Découle directement de ce qui précède:

D'une part: $\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{r}}{ds} = v(t)\,\hat{\vec{\tau}}$

D'autre part: $\vec{v}(t) = ||\vec{v}(t)||\,\hat{\vec{\tau}}$

$\hat{\vec{\tau}}$: Vecteur unitaire (≡ de norme 1) parallèle à la trajectoire

Vitesses vectorielle moyenne et scalaire moyenne

Si entre les temps t_i et t_f le point matériel a évolué entre les positions $\vec{r}_i$ et $\vec{r}_f$ on définit:

Définition: Vitesse vectorielle moyenne

$$<\vec{v}>=\frac{\vec{r}_f-\vec{r}_i}{t_f-t_i}$$

à ne pas confondre avec :

Définition: Vitesse scalaire moyenne

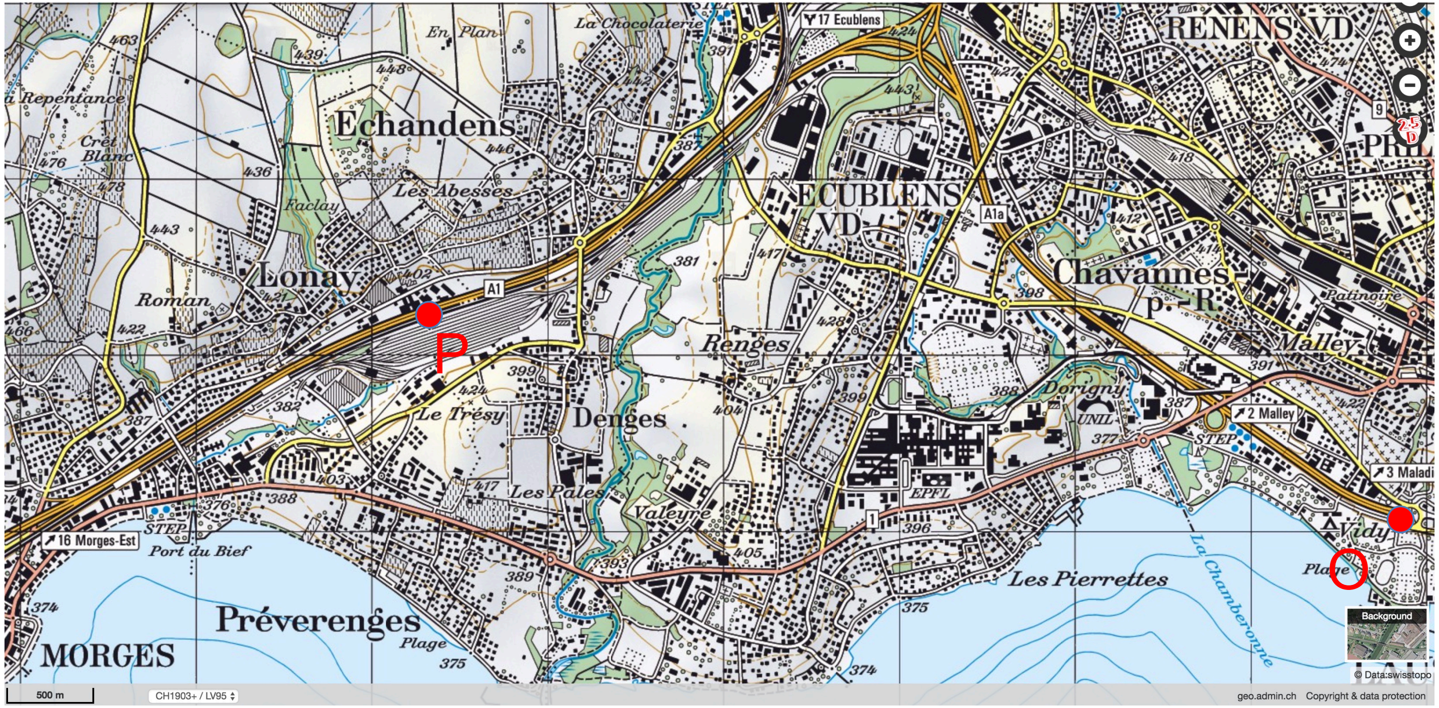
$$<v>=\frac{\text{Distance parcourue}}{t_f-t_i}=\frac{s(t_f)-s(t_i)}{t_f-t_i}$$

Illustration: Trajet Lausanne-Genève aller-retour: $<\vec{v}>=0, \quad <v>\simeq 100\mathrm{km/h}$

Abscisse curviligne, vitesses scalaire et vectorielle, analogie

Analogie: trajet d'autoroute Lausanne-Morges

- L'abscisse curviligne est la distance parcourue depuis l'entrée sur l'autoroute
- La vitesse scalaire est la vitesse indiquée par le compteur de votre voiture
- La vitesse vectorielle est tangente à la route



- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

Définition: **Accélération**

Vecteur, dérivée temporelle seconde du vecteur position, dérivée temporelle de la vitesse:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}''(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

Contrairement à la vitesse, qui est tangente à la trajectoire, l'accélération peut en plus avoir une composante qui lui est perpendiculaire (ou normale). Nous parlerons d'**accélération tangentielle** pour la composante parallèle à la trajectoire, et d'**accélération normale** pour la composante perpendiculaire.

Composantes de l'accélération: Accélération tangentielle

On appelle $\vec{\hat{\tau}}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire: $\vec{v} = v\vec{\hat{\tau}}$

L'accélération est alors:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{\hat{\tau}}\right) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\,\vec{\hat{\tau}}}_{\text{Composante tangentielle à la trajectoire}} + \underbrace{v\frac{d\vec{\hat{\tau}}}{dt}}_{\text{Autre composante}}$$

Définition: Accélération tangentielle

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\,\vec{\hat{\tau}}$$

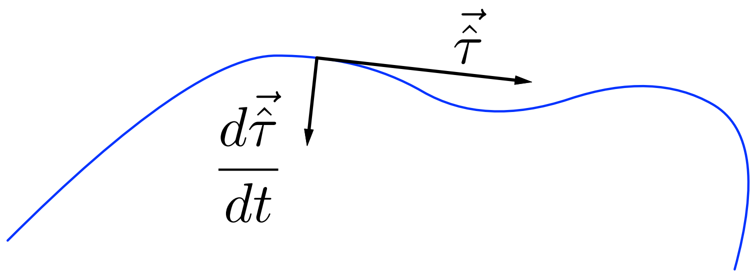
où $\vec{\hat{\tau}}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et v la vitesse scalaire

Analogie: trajet d'autoroute Lausanne-Morges
L'accélération tangentielle correspond à la variation temporelle de la vitesse indiquée par le compteur

On se concentre sur le terme $v\dfrac{d\vec{\hat{\tau}}}{dt}$. Quelle est sa direction?

Astuce: Comme $\vec{\hat{\tau}}\cdot\vec{\hat{\tau}} = 1 \implies \dfrac{d}{dt}(\vec{\hat{\tau}}\cdot\vec{\hat{\tau}}) = \dfrac{d\vec{\hat{\tau}}}{dt}\cdot\vec{\hat{\tau}} + \vec{\hat{\tau}}\cdot\dfrac{d\vec{\hat{\tau}}}{dt} = 0$

$$\implies \frac{d\vec{\hat{\tau}}}{dt} \perp \vec{\hat{\tau}}$$



Analogie: trajet d'autoroute Lausanne-Morges
Force centripète (dirigée vers l'intérieur du virage).

Il nous manque encore l'amplitude de $v\dfrac{d\vec{\hat{\tau}}}{dt}$

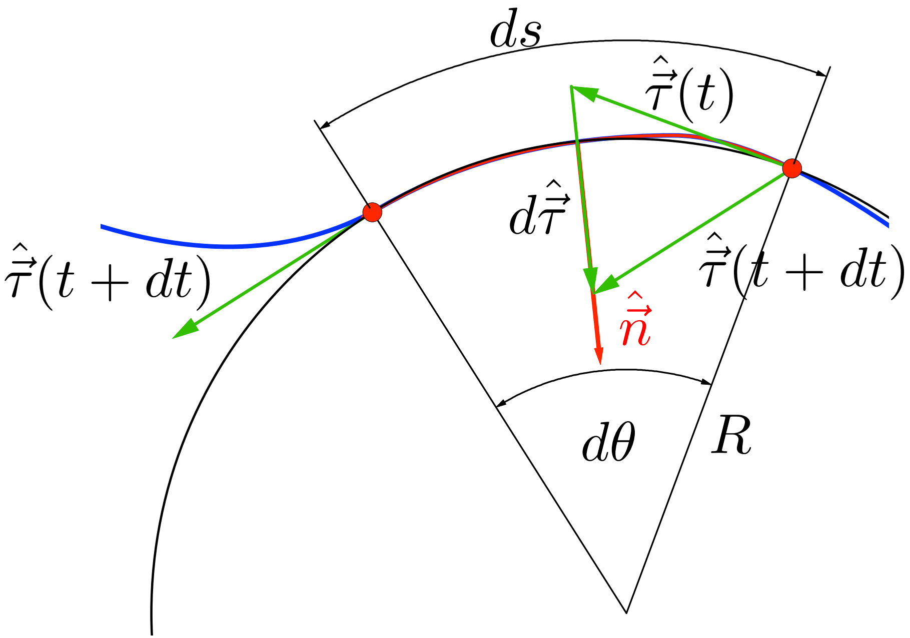
Faculté
des sciences
de base

Swiss
Plasma
Center

Composantes de l'accélération: Accélération normale

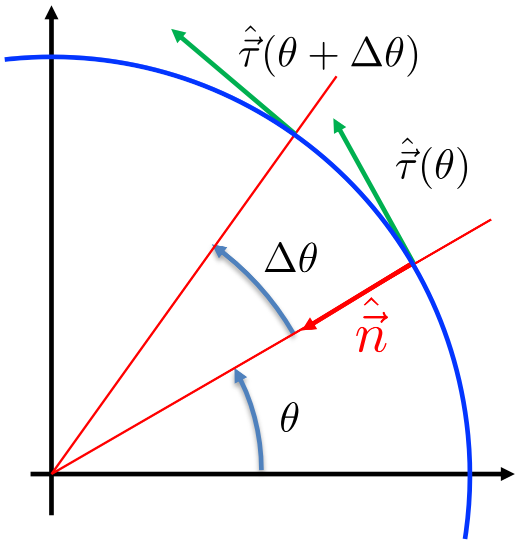
$$v\frac{d\vec{\hat{\tau}}}{dt} = v\frac{d\vec{\hat{\tau}}(s(t))}{dt} = v\frac{d\vec{\hat{\tau}}}{ds}\frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\vec{\hat{\tau}}}{ds}$$

Pour estimer $\frac{d\vec{\hat{\tau}}}{ds}$ on approxime la trajectoire entre t et t + dt par un cercle de rayon R



$$ds = R\,d\theta$$

Composantes de l'accélération: Evolution du vecteur tangent à la trajectoire



$$\vec{\hat{\tau}}(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{\hat{\tau}}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \vec{\hat{n}}$$

$$d\vec{\hat{\tau}} = \vec{\hat{n}}\, d\theta$$

$$ds = R\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{\hat{\tau}}}{ds} = \frac{1}{R}\,\vec{\hat{n}}$$

On remplace $\dfrac{d\vec{\hat{\tau}}}{ds}$ dans l'expression de $v\dfrac{d\vec{\hat{\tau}}}{dt}$ et on trouve finalement:

$$\Longrightarrow \qquad v\frac{d\vec{\hat{\tau}}}{dt} = \frac{v^2}{R}\,\vec{\hat{n}}$$

Faculté des sciences de base

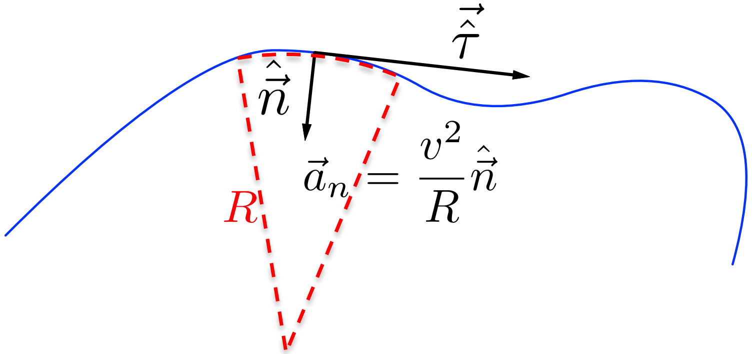
Swiss Plasma Center

Définition: **Accélération normale**

$$\vec{a}_n = v\frac{d\hat{\vec{\tau}}}{dt} = \frac{v^2}{R}\,\hat{\vec{n}}$$

où $\hat{\vec{n}}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la trajectoire et orienté vers le centre de courbure de rayon R.

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\,\hat{\vec{\tau}}$$



En résumé: L'accélération s'écrit:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t) = a_t(t)\,\hat{\vec{\tau}} + a_n(t)\,\hat{\vec{n}} = \frac{dv(t)}{dt}\,\hat{\vec{\tau}} + \frac{v^2(t)}{R}\,\hat{\vec{n}}}$$

$$\vec{a}_t(t) = \frac{dv(t)}{dt}\,\hat{\vec{\tau}}$$ **Accélération tangentielle**

$$\vec{a}_n(t) = \frac{v^2}{R}\,\hat{\vec{n}}$$ **Accélération normale, ou radiale**

$\hat{\vec{\tau}},\ \hat{\vec{n}}$ **Vecteurs unitaires tangent et perpendiculaire à la trajectoire**

R **Rayon de courbure de la trajectoire**

Un point se déplace à vitesse vectorielle ***v*** *constante par rapport au référentiel. Le point est à la position* $\boldsymbol{r}_0$ *du référentiel au temps t=0. Obtenir l'équation horaire du point,* ***r***(*t*)*.*

On choisit un système de coordonnées tel que l'axe x est parallèle à la vitesse **v**. Avec ce choix, le problème est unidimensionnel, et le point matériel se trouve à la position x_0 au temps $t=t_0$ et il suffit de trouver x(t).

Le fait que la vitesse est constante se traduit par l'équation différentielle:

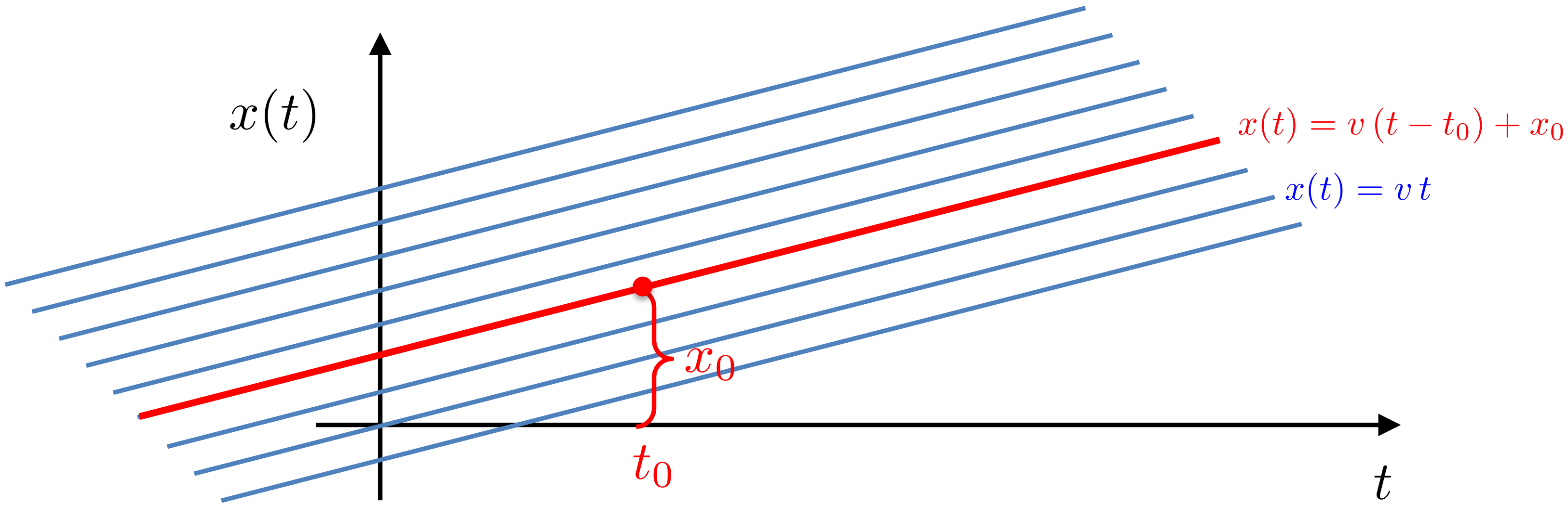
$$\frac{dx(t)}{dt} = v = \mathrm{cste}$$

…. avec la condition initiale $x(t=t_0) = x_0$

Mouvements à 1 dimension: MRU

[mooc 2.3]

N'importe quelle fonction $x(t) = v\,t + C$ où C est une constante satisfait l'équation.



L'application de la condition initiale $x(t = t_0) = x_0$ permet de sélectionner la bonne solution (i.e. la bonne valeur de C)

$$x(t = t_0) = v\,t_0 + C = x_0 \quad \Longrightarrow \quad C = x_0 - v\,t_0$$

$$\boxed{x(t) = v\,(t - t_0) + x_0}$$

Mouvement rectiligne uniforme

Petite parenthèse: intégration

Nous venons d’intégrer une équation différentielle dans un cas très simple.

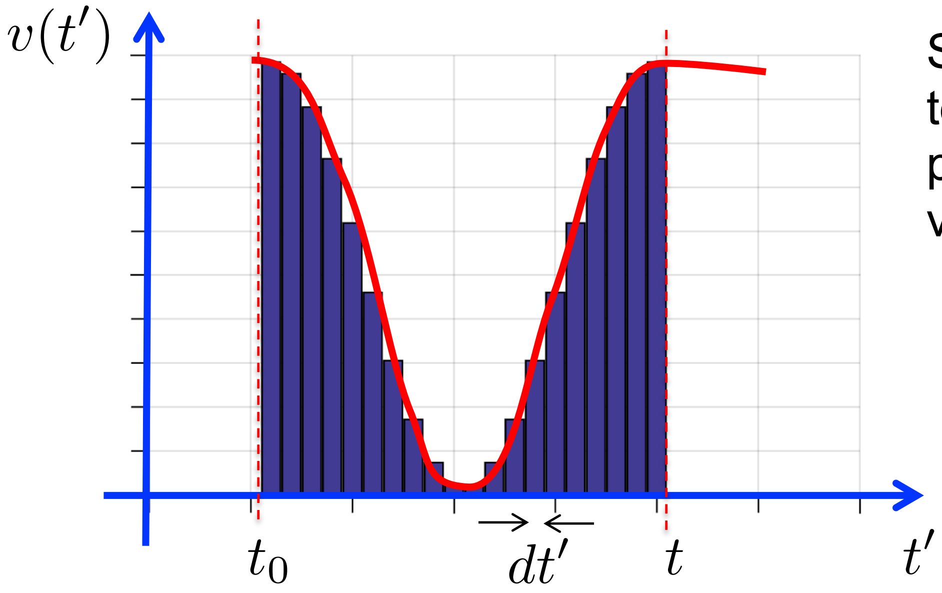
$$x(t) = v(t - t_0) + x_0$$

Si $t_0 = x_0 = 0$ on retrouve une formule bien connue : x=vt
Il faut bien noter qu’elle est fausse en général, sauf si v=cste.
La vraie formule est:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \Longrightarrow \quad dx = v\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

si v ne dépend pas de t on retrouve bien la formule ci-dessus.

Petite parenthèse: intégration



Si v dépend de t, il faut 'découper' le temps en intervalles infinitésimaux pendant lesquels on considère que la vitesse est constante.

$$\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' \simeq \sum_i v(t'_i)\,dt'$$

Si on trouve une primitive $V(t)$ de $v(t)$, i.e. t.q. : $\dfrac{dV(t)}{dt} = v(t)$

alors $$\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' = V(t')\Big|_{t_0}^{t} = V(t) - V(t_0)$$

Un point se déplace sur une ligne droite avec une accélération constante par rapport au référentiel. A l'instant $t = t_0$ le point est à la position x_0 et a la vitesse v_0 .
Obtenir l'équation horaire du point.

On procède de la même manière que dans le cas du MRU: on choisit un système de coordonnées tel que l'axe x est parallèle à l'accélération $\vec{a}$. Avec ce choix, le problème est unidimensionnel, et le point matériel se trouve à la position x_0 au temps $t = t_0$, avec la vitesse v_0 .

Accélération constante:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x} = a = \mathrm{cste}$$

Conditions initiales:

$$x(t = t_0) = x_0 \quad , \quad v(t = t_0) = v_0$$

(*) On fait l'hypothèse restrictive que v est parallèle à a pour garder le caractère unidimensionnel du mouvement

Mouvements à 1 dimension: MRUA

[mooc 2.3]

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x} = a = \mathrm{cste} \qquad x(t=t_0) = x_0 \quad , \quad v(t=t_0) = v_0$$

Première intégration par rapport au temps (+ condition initiale):

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = v(t) = a(t-t_0) + v_0}$$

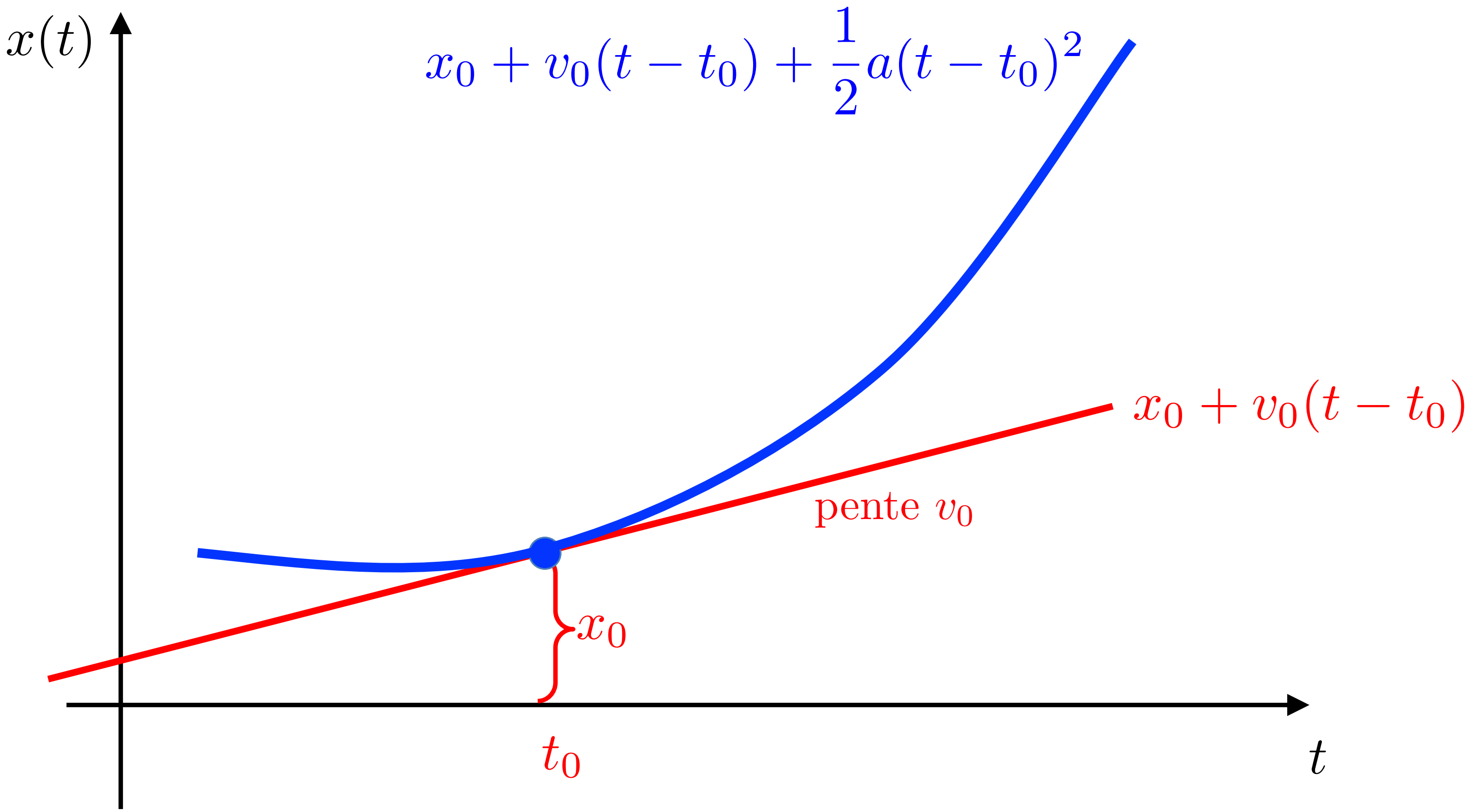
Seconde intégration par rapport au temps (+ C.I.):

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0) + x_0}$$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

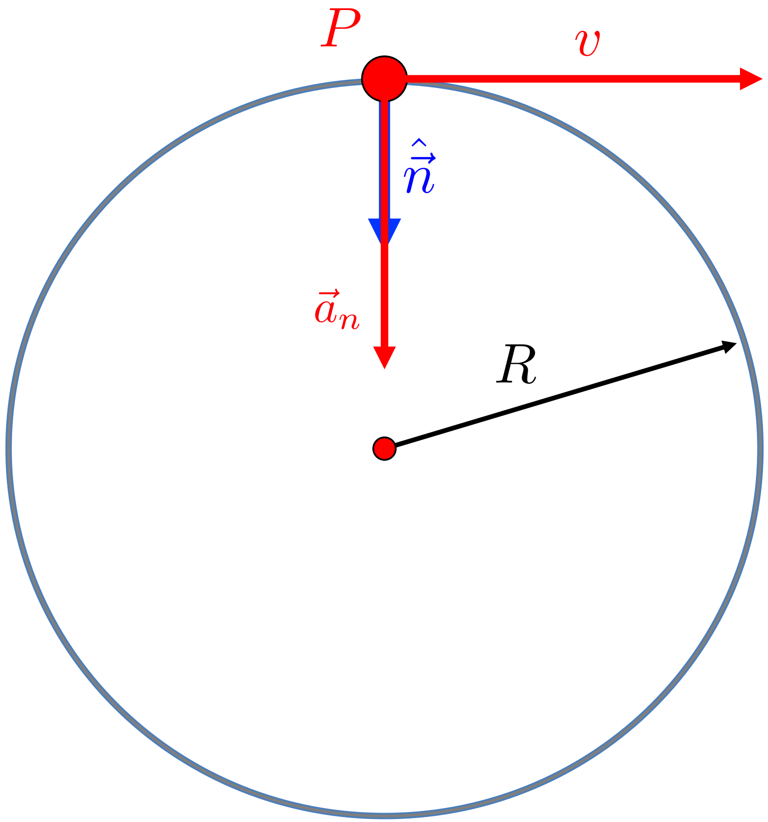
(*) On fait l'hypothèse restrictive que v est parallèle à a pour garder le caractère unidimensionnel du mouvement

Mouvements à 1 dimension: MRUA



Faculté des sciences de base
Swiss Plasma Center

Mouvement circulaire uniforme



Dans le référentiel du laboratoire, le point matériel P a une trajectoire circulaire de rayon R et une vitesse scalaire v constante.
Son accélération tangentielle est nulle, et son accélération normale est dirigée vers le centre du cercle et vaut:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \hat{\vec{n}}$$

Exemple:
Enfant sur un carrousel. L'accélération est dirigée **vers le centre** du carrousel

- **Description du mouvement:**

Position: $\vec{r}(t)$ Vitesse: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ Accélération: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$

- **Vitesse scalaire:** $v(t) = |\vec{v}(t)| = \frac{d\,s(t)}{dt}$ s: abscisse curviligne

- **Accélération:** $\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t) = a_t(t)\,\hat{\vec{\tau}} + a_n(t)\,\hat{\vec{n}}$

$\hat{\vec{n}}$ Vecteur normal à la trajectoire

$\hat{\vec{\tau}}$ Vecteur tangent à la trajectoire

Accélération tangentielle: $\vec{a}_t = \frac{d\,v}{dt}\,\hat{\vec{\tau}}$

Accélération normale: $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\hat{\vec{n}}$ R: Rayon de courbure de la trajectoire

- Mouvement rectiligne uniforme:

$$\vec{a}_t = 0 \qquad \vec{a}_n = 0$$

MVT 1D, on omet les vecteurs

$$v(t) = v(t = t_0) = v_0$$

$$x(t) = v_0\,(t - t_0) + x_0$$

Cond. initiales

- Mouvement rectiligne uniformément accéléré:

$$a_t = a = \text{cste} \qquad \vec{a}_n = 0$$

$$v(t) = a\,(t - t_0) + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a\,(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + x_0$$

- Mouvement circulaire uniforme: $\vec{a}_t = 0 \qquad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\hat{\vec{n}} \qquad v = \text{cste}$